数理解析研究所講究録
200巻 1974年 101-105

4重可移群の分類について

大教大 大山 豪

1. 現在迄に知られている4重可移群は 対称群 S_n $(n \geqq 4)$, 交代群 A_n $(n \geqq 6)$ 及び Mathieu 群 M_n $(n=11, 12, 23, 24)$ である。

今迄に4重可移群についていろいろ調べてきたが, いまだ分類できそうにない。永尾, 野田, 大山による On multiply transitive groups I～XI において次の様な結果を得た.

以下 G : $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上の4重可移群

X を G の部分集合とするとき

$I(X) = \{ i \in \Omega \mid$ すべての $x \in X$ に対して $i^x = i \}$ とす.

(定理 1)

$G = S_5, A_6, M_{11}$ を除き $|I(G_{1234})| = 4$ である

(定理 2)

P を G_{1234} の 2 シロー群とす. $G = A_6, A_7, M_{11}, M_{23}$ を除き $|I(P)| = 4$ 又は 5 である。

2. 最近次の結果を得た.

以下 t を G の involution の固定点の個数の最大数とす。即 $n-t$ は G の 2 シロー群の minimal degree である。

（定理 3）

ある t 個の点の G における stabilizer の 2 シロー群 Q で, $N(Q)^{I(Q)}=A_t$ 又は S_t なる Q が存在すれば, G は知られたものすべてに限る。

証明は多少長たらしいが, 考へ方は次による。
$n<35$ のときの 4 重可移群は知られている故, G を $n\geqq 35$, $G\neq A_n$ で仮定をみたす最小次数の群とす。

今 $N(Q)^{I(Q)}=S_t$ とす

$$x_i=(1)(2)\cdots(2i-2)(2i-1\ \ 2i)(2i+1)\cdots(t)\cdots$$

なる $N(Q)$ の元が存在し, $\langle Q, x_1, x_2, \cdots, x_k\rangle$ （$k=\frac{t}{2}$ 又は $\frac{t-1}{2}$）は 2-群をなすとしてよい。

$R=\langle Q, x_1, x_2, \cdots, x_i\rangle$ は $\Omega-I(Q)$ 上 semi-regular と仮定する。このとき $\Omega-I(Q)$ 上の R- orbit の長さは $2^i\cdot|Q|$ である。x を $I(Q)$ 上互換のみを高々 i 個もつ $N(Q)$ の任意の 2-元とす。$N(Q)^{I(Q)}=S_t$ 故 R は $\langle Q, x\rangle$ に共役な部分群を含む. 従って x は $\Omega-I(Q)$ 上に固定点をもたない。今 $\langle R, x_{i+1}\rangle$ が $\Omega-I(Q)$ 上

semi-regular でないとす。即 $x_{i+1} \in N(R)$ 故 x_{i+1} は $\Omega - I(\Theta)$ 上のある R-orbit Γ を固定するとす。すると Γ 上に固定点をもつ $\langle R, x_{i+1} \rangle$ の元 $(\neq 1)$ は $x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta$ の元で高々 $|\Theta|$ 個である。$x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta$ の元は $I(\Theta)$ 上 $i+1$ 個の互換のみよりなる故，固定点の個数に関する仮定より Γ 上高々 $2(i+1)$ 個の固定点をもつ。

$\langle R, x_{i+1} \rangle$ の元 x に対し $\alpha(x) = |I(x) \cap \Gamma|$ とおくと

$$\sum_{x \in \langle R, x_{i+1} \rangle} \alpha(x) = |\langle R, x_{i+1} \rangle| = 2^{i+1} \cdot |\Theta|$$

一方 $\quad$ 左辺 $= \alpha(1) + \sum'_{x \in x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta} \alpha(x) \leqq 2^i \cdot |\Theta| + 2(i+1)|\Theta|$

$$\therefore \quad 2^{i+1} \leqq 2(i+1)$$

$$\therefore \quad i \leqq 3$$

従って $\langle \Theta, x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ が $\Omega - I(\Theta)$ 上 semi-regular であることを証明することにより，$\langle \Theta, x_1, x_2, \cdots, x_k \rangle$ は $\Omega - I(\Theta)$ 上 semi-regular となる。($n - t \equiv 2 \pmod 4$ のときは $\langle \Theta, x_1, x_2, \cdots, x_k \rangle$ は $\Omega - I(\Theta)$ 上に長さ 2 の orbit を 1 つもち，残りの点の集合の上で semi-regular を示す)。

しかし Θ の involution

$$a = (1)(2) \cdots (t)(i\ j)(k\ l) \cdots$$

に対して a と可換な G_{ijkl} の involution u をとると $u^{I(\Theta)} \neq 1$ で，u は $\Omega - I(\Theta)$ 上に固定点を 4 つ以上もち矛盾を得る。

$N(\Theta)^{I(\Theta)} = A_t$ のときは上の x_i を $I(\Theta)$ 上互換 2 つよりなる元として同様な方法を用いて証明される。

次の補題の証明はむつかしくはない。

（補題）

QをΩの任意のt個の点のGにおける stabilizer の2-群とすると $N(Q)^{I(Q)} \neq M_{12}$ である。

この補題と定理3より次の事を容易に得る

（系4）

nを偶数，PをG_{1234}の2シロー群$(\neq 1)$，$Z(P)$をPの中心とする。

(1) $I(P)=I(Z(P))$ とすれば $G=S_n\ (n\geqq 6)$, $A_n\ (n\geqq 8,\ n\equiv 0 \pmod 4)$ 又は M_{12} である

(2) $\Omega-I(P)$ の任意の点 i に対して P_i が $\Omega-I(P_i)$ 上 semi-regular $(\neq 1)$ であれば $G=S_8$, A_{10} 又は M_{24} である。

(1)は $|I(Q)|=t$ である2-群Qに対して $C(Q)^{I(Q)}$ は4重可移群で定理の仮定をみたしている事より証明される。

(2)は $N(P_i)^{I(P_i)}$ が又4重可移群で $I(P_i)$ の任意の4点の $N(P_i)^{I(P_i)}$ における stabilizer の2シロー群が semi-regular である事より証明される。

（系 5）

$\mathfrak{P}$ を $\mathfrak{G}_{1234}$ の 2 シロー群（$\neq 1$）とす。$\mathfrak{P}$ が $\Omega - I(\mathfrak{P})$ 上可移であれば，$\mathfrak{G} = S_n$（$n \geqq 6$，$n-4$ 又は $n-5$ が 2 巾），A_n（$n \geqq 8$，$n-4$ 又は $n-5$ が 2 巾），M_{12} 又は M_{23} である。

これは次の様にして証明される．n が奇数のときは定理 1 及び 2 より $\mathfrak{G}$ は 5 重可移群になる．従って n は偶数としてよい．このとき $\mathfrak{P}$ は系 4 の (1) の仮定をみたす。

3. 以上より 5 重可移群あるいは 4 重可移群の決定は次の問題に帰着されるかも知れない

（問題 1）

系 2 より n が偶数で $I(P) \supset I(Z(P))$ のときの $\mathfrak{G}$ を求めよ．これができれば 5 重可移群は決る

（問題 2）

定理 3 より $|I(Q)| =$ もなる 2-群 Q（$< \mathfrak{G}_{ijkl}$）で Witt の仮定（$\mathfrak{G}$ の元 g で $Q^g < \mathfrak{G}_{ijkl}$ ならば $Q^g = Q^h$ なる $\mathfrak{G}_{ijkl}$ の元 h が存在する）をみたす Q が存在する事が云えれば $N(Q)^{I(Q)} = M_{24}$ の場合を除き 4 重可移群は決る．$N(Q)^{I(Q)} = M_{24}$ の場合は困難ではないと思う。